제 2017년 국제수학올림피아드 집중교육

IMO 모의고사 1회

2017년 6월 15일

1. 삼각형 ABC의 외심과 내심을 각각 O, I라 하자. 원 K는 변 AB, AC에 접하고, 원 O에 내접한다. 반직선 AO위의 두 점 M, N은 $\angle ABM = \angle ICB$와 $\angle ACN = \angle IBC$를 만족한다. 삼각형 IMN의 외심을 L이라 하고, AK를 지름으로 가지는 원이 원 O와 $G(\neq A)$에서 만난다고 할 때, AL과 GI의 교점이 원 O 위에 놓임을 보여라.

2. 임의의 소수 p와 실수 $x > 0$에 대해,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

의 분자가 p의 배수가 되는 $n \leq x$의 개수가 $2017x^{3/4}$ 이하임을 보여라.

3. 양의 정수 n이 있고, n개의 바구니 각각에 동전이 한 개씩 들어있다. i번째 동전을 $a_i > 0$원이라 하자. 여기서 두 바구니 속의 동전을 한 바구니로 합치는 시행을 $n-1$번 하여 한 개의 바구니에 n개의 동전이 모두 들어있는 상태로 만들었다. 시행 중 i번째 동전이 들어있는 바구니의 동전들의 (산술)평균을 계산할 수 있는데, 이 값이 최대였을 때 b_i원이 되었었다고 하자. 이때 다음 부등식을 증명하여라.

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$$

4. 단위정사각형들로 이루어진, 꼭짓점의 좌표가 모두 정수이고 변이 x축 또는 y축에 평행한 다각형 B가 있다. B를 B 내부에 속하는 직사각형들로 (겹칠 수 있게) 덮는데 필요한 직사각형의 최솟값을 $\theta(B)$라 하자. 또한 B 내부의 단위정사각형을 선택하되 임의의 두 정사각형도 B 내부의 직사각형으로 동시에 덮이지 않도록 선택할 수 있는 최대 개수를 $\alpha(B)$라 하자. 이때 $\alpha(B) \leq \theta(B) \leq 2\alpha(B) - 1$임을 증명하여라.

제한시간 : 4시간 30분

문항당 7점

제 2017년 국제수학올림피아드 집중교육

IMO 모의고사 2회

2017년 6월 20일

1. IMO니아에는 V개의 도시와 k개의 항공사가 있고, 몇몇 도시들을 연결하는 편도 항공편이 있다. (단, A에서 B로 가는 항공편은 한 항공사만 운영한다.) 서로 항공편으로 연결되지 않은 도시는 최대 α개라고 하고, 한 항공사만 이용하여 어떤 도시에서 출발한 후 몇몇 도시를 거쳐 출발지로 되돌아오는 방법은 없다고 한다. 만약 양의 정수 $n_1, \dots, n_k$에 대해 $V > \alpha n_1 n_2 \cdots n_k$라면, i번째 항공사의 항공편을 n_i번 연속하여 이용하는 것이 가능한 $1 \le i \le k$가 존재함을 보여라.

2. 소수 p와 부분집합 $A, B \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$에 대해 다음 부등식을 증명하여라.

$$\left|\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\cos\left(\frac{2\pi ab}{p}\right)\right| \le p^{1/2}|A|^{1/2}|B|^{1/2}$$

3. 양의 정수 $a, b > 1$이 주어져 있다. 다음 방정식의 양의 정수해 (x, y)를 생각하자.

$$a^x - b^y = 1$$

(a) 만약 y가 짝수라면, $x = 1$임을 보여라.
(b) 만약 $(a, b) \neq (3, 2)$라면, 해 (x, y)는 많아야 하나임을 보여라.

4. 두 원 ω_1, ω_2는 B, C에서 만나며, A는 두 원 내부에 있는 점이다. 선분 AB, AC와 모두 접하며 ω_1, ω_2에 내접하는 두 원을 γ_1, γ_2라 하고, 반직선 AB, AC와 모두 접하며 ω_1, ω_2와 외접하는 두 원을 Γ_1, Γ_2라 하자. 원 γ_1, Γ_1이 ω_1과 접하는 점을 P, Q라 하고, 원 γ_2, Γ_2이 ω_2와 접하는 점을 K, L이라 하자. 반직선 AK이 γ_1과 만나는 점 중 A에서 먼 점을 R, 반직선 AL이 Γ_1과 만나는 점 중 A에 가까운 점을 S라 하자. 이때 P, Q, R, S이 한 원 위에 있음을 보여라.

제한시간 : 4시간 30분
문항당 7점

제 2017년 국제수학올림피아드 집중교육

IMO 모의고사 3회

2017년 6월 24일

1. 원주 위에 n개의 유리수가 $a_1, \dots, a_n$ 순서로 적혀있다. 여기서 a_i를 $|a_i - a_{i+1}|$으로 동시에 바꾸는 시행을 한다. (단, $a_{n+1} = a_1$.) 초기상태에 수들이 어떻게 주어지든 유한번의 시행 이후에 모든 수가 0이 되는 양의 정수 n을 모두 구하여라.

2. 임의의 실수 x, y에 대해 다음 방정식을 만족하는 (약)증가 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 모두 구하여라.

$$f(x + f(y)) = f(f(x)) + f(y)$$

3. 삼각형 ABC 내부의 두 점 P, Q가 $\angle ABP = \angle CBQ$와 $\angle ACP = \angle BCQ$를 만족하고, Q를 지나는 직선 ℓ이 있다. 직선 ℓ과 직선 BC, CA, AB가 X, Y, Z에서 만난다고 하고, AP, BP, CP과는 D, E, F에서 만난다고 하자. 이때 삼각형 PDX, PEY, PFZ, ABC의 외접원이 모두 한 점에서 만남을 보여라.

4. 양의 정수 s, t가 주어져 있다. 2017IMO에 참가한 학생들은 임의의 두 명을 뽑았을 때 서로 아는 관계이거나 모르는 관계라고 하고, 임의의 학생은 적어도 $s+t+1$명의 학생을 안다고 한다. 이때 학생들을 두 그룹으로 나누어, 첫 번째 그룹의 임의의 학생은 같은 그룹에 아는 학생이 적어도 s명이 있고, 두 번째 그룹의 임의의 학생은 같은 그룹에 아는 학생이 적어도 t명 있도록 할 수 있음을 증명하여라. (단, 각 그룹에는 적어도 한 명의 학생이 있어야 한다.)

제한시간 : 4시간 30분
문항당 7점

제 2017년 국제수학올림피아드 집중교육

I M O 모의고사 4회

2017년 6월 xx일

1. IMO니아에는 n개 이상의 도시가 있고, 임의의 두 도시를 연결하는 일방통행로가 한 개씩 있다. 임의의 n개의 도시에 대해, 다른 어떤 도시가 존재하여 그 도시에서는 n개의 도시로 (다른 도시를 거치지 않고) 가는 도로가 있다고 한다. 이때 IMO니아에 도시가 $2^{n+1}-1$개 이상 존재함을 보여라.

2. 함수 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$과 실수 $x, h_1, \ldots, h_n$에 대해 다음 등식을 생각하자.

$$\sum_{A\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|A|} f\big(x+\textstyle\sum_{a\in A} h_a\big) = 0 \qquad (*)$$

만약 임의의 $h_1=\cdots=h_n$에 대해 $(*)$이 성립한다면, 임의의 $h_1,\ldots,h_n$에 대해서도 $(*)$이 성립함을 보여라.

3. 삼각형 ABC의 수심은 H이고, B-방접원과 C-방접원이 변 AC와 AB와 접하는 점을 E와 F라 하자. 직선 BE와 CF는 N에서 만나고, N에서 BC에 내린 수선의 발은 K이다. 사각형 $ABDC$가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡고, M을 DN의 중점이라 하자. 이때 $\angle MKH=\angle MKN$임을 보여라.

4. 임의의 소수 $p=8k+3\geq 11$에 대해,

$$p=a^2+bc, \quad b<c<\sqrt{p}$$

를 만족하는 양의 정수 (a,b,c)가 존재함을 보이고, 그 개수가 홀수임을 증명하여라.

제한시간 : 4시간 30분

문항당 7점

제 2017년 국제수학올림피아드 집중교육

IMO 모의고사 5회

2017년 7월 8일

1. 평면 위에 네 점 $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$을 포함하는 볼록다각형 P가 있다. P의 내부 또는 경계에 $\gcd(x, y) = 1$인 격자점 (x, y)가 A개 있다고 하고, $\gcd(x, y) = 2$인 격자점 (x, y)가 B개 있다고 하자. 이때 $A \geq 2B$임을 보여라.

2. 삼각형 ABC의 수심은 H이고, 내접원 I는 변 AC, AB와 E, F에서 접한다. 변 AB, AC의 중점을 M, N이라 하고, MI와 CH의 교점을 Q, NI와 BH의 교점을 P라 하자. 직선 PQ와 EF의 교점을 S라 할 때, IS와 BC가 평행함을 보여라.

3. IMO니아에는 몇 개의 도시가 있고, 이들을 연결하는 도로가 2017개 있다. 이 도로들을 (여러 번) 이용하면 각 도시에서 다른 도시로 항상 이동할 수 있다고 하자. IMO니아의 황제 Geoff는 각각의 도시에 양의 정수의 번호를 부여하여, 도로로 직접 연결된 두 도시는 서로 다른 번호를 가지도록 하고 싶다고 한다. 이때 번호의 총합이 3027 이하가 되도록 할 수 있음을 보여라.

4. 계수가 양의 실수인 다항식

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

이 모든 $1 \leq i \leq n-1$에 대해 $a_i^2 - 4a_{i-1}a_{i+1} > 0$을 만족한다. 이때 $P(x)$는 서로 다른 n개의 실근을 가짐을 증명하여라.

제한시간 : 4시간 30분
문항당 7점